

LBPIS | we know
books

Gheorghe IUREA

Adrian ZANOSCHI

Gabriel POPA

Gabriela-Elena ZANOSCHI

Ioana ANTON

matematică

aritmetică

geometrie

clasa a VI-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

<i>Cuvânt-înainte</i>	5
-----------------------------	---

PROBLEME RECAPITULATIVE – CLASA A V-A	7
--	---

TESTE ÎNȚIALE	12
----------------------------	----

ARITMETICĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime.....	14
I.2. Relații între mulțimi	16
I.3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale	18
I.4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență.....	20
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	23
I.5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	24
I.6. Cel mai mare divizor comun. Numere prime între ele.....	27
I.7. Cel mai mic multiplu comun.....	29
I.8. Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$	32
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	35

CAPITOLUL II. RAPOARTE. PROPORȚII

II.1. Rapoarte	37
II.2. Procente.....	41
II.3. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor	44
II.4. Proporții derivate. Șir de rapoarte egale.....	47
II.5. Mărimi direct și invers proporționale	50
II.6. Regula de trei simplă.....	54
II.7. Elemente de organizare a datelor	55
II.8. Probabilități	61
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	65

CAPITOLUL III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

III.1. Număr întreg. Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi	67
III.2. Adunarea și scăderea numerelor întregi	71
III.3. Înmulțirea numerelor întregi	74
III.4. Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	77
III.5. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri	80
III.6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor.....	83

III.7. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor întregi.....	85
III.8. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi	87
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	89

CAPITOLUL IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

IV.1. Număr rațional. Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale.....	90
IV.2. Adunarea și scăderea numerelor raționale	97
IV.3. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale	102
IV.4. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri	106
IV.5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor.....	110
IV.6. Ecuații în mulțimea numerelor raționale.....	114
IV.7. Probleme rezolvate cu ajutorul ecuațiilor.....	118
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	121

GEOMETRIE

CAPITOLUL V. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

V.1. Unghiul. Recapitulare și completări.....	123
V.2. Unghiuri complementare, unghiuri suplimentare. Unghiuri adiacente	126
V.3. Bisectoarea unui unghi.....	128
V.4. Unghiuri opuse la vârf	131
V.5. Unghiuri formate în jurul unui punct	133
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	135
V.6. Drepte paralele	136
V.7. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă	140
V.8. Drepte perpendiculare în plan.....	144
V.9. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă.....	149
V.10. Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru	154
V.11. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	159
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	163

CAPITOLUL VI. TRIUNGHIUL

VI.1. Triunghiul: definiție, elemente. Perimetru. Clasificări	165
VI.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi. Teorema unghiului exterior.....	169
VI.3. Construcția triunghiurilor	172
VI.4. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi	175
VI.5. Mediatoarele laturilor unui triunghi.....	178
VI.6. Înălțimile unui triunghi	180
VI.7. Medianele unui triunghi.....	184
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	186

VI.8. Congruența triunghiurilor oarecare. Criteriile de congruență a triunghiurilor	187
VI.9. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice	192
VI.10. Metoda triunghiurilor congruente	196
VI.11. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment.....	200
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	203
VI.12. Proprietăți ale triunghiului isoscel	205
VI.13. Proprietăți ale triunghiului echilateral	212
VI.14. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic.....	217
VI.15. Teorema lui Pitagora	222
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	225

RECAPITULARE FINALĂ

ARITMETICĂ	227
GEOMETRIE	231

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	240
------------------------------	-----

CAPITOLUL I

MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. DESCRIERE, NOTAȚII, REPREZENTĂRI. MULȚIMI NUMERICE/ NENUMERICE. RELAȚIA DINTRE UN ELEMENT ȘI O MULȚIME



• În matematică, o **mulțime** este o colecție de obiecte diferite, numite **elementele mulțimii**. Elementele unei mulțimi pot fi obiecte matematice de orice fel: numere, simboluri, figuri geometrice, alte mulțimi etc.

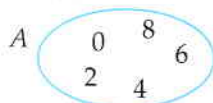
Mulțimile se notează cu litere mari.

Dacă A este o mulțime și x este un element al său, spunem că „ x aparține mulțimii A ” și scriem $x \in A$. Dacă x nu este un element al mulțimii A , spunem că „ x nu aparține mulțimii A ” și scriem $x \notin A$.

O mulțime poate fi reprezentată astfel:

1. scriind elementele sale între două acolade: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2. cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler:



3. indicând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii:

$$A = \{x \mid x \text{ este număr natural par, mai mic decât } 10\}.$$

O mulțime ale cărei elemente sunt numere se numește mulțime **numerică**:

$A = \{1, 2, 3\}$ este o mulțime numerică, iar $B = \{a, b, c\}$ nu este o mulțime numerică.

Mulțimea care nu are niciun element se numește mulțimea **vidă** și se notează cu simbolul $\emptyset$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Considerăm cuvântul „matematica” și mulțimea A , formată din literele acestuia.

a) Câte litere are cuvântul considerat?

b) Câte elemente are mulțimea A ?

c) Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții:

$$P_1: m \in A; P_2: e \notin A; P_3: z \in A; P_4: m \in A \text{ și } t \notin A; P_5: c \notin A \text{ sau } t \in A.$$

d) Stabiliți care dintre propozițiile următoare este adevărată:

$$Q_1: A = \{m, a, t, e, i, c\}; Q_2: A = \{m, a, t, e, m, a, t, i, c, a\}; Q_3: A = \{a, e, i, c, m, t\};$$

$$Q_4: A = \{m, t, c, a, e\}.$$

- b) Elementele unei mulțimi sunt distincte, deci mulțimea A are 6 elemente.
- c) Avem: P_1 este adevărată, P_2 este falsă, P_3 este falsă, P_4 este falsă (căci $t \in A$), iar P_5 este adevărată (deoarece $t \in A$).
- d) În scrierea unei mulțimi, fiecare element apare o singură dată, iar ordinea în care sunt scrise elementele nu contează. Prin urmare, Q_1 și Q_3 sunt adevărate, iar Q_2 și Q_4 sunt false.

2. Scrieți fiecare dintre următoarele mulțimi, enumerându-le elementele:

- a) mulțimea cifrelor impare;
- b) mulțimea cifrelor numărului 2023;
- c) mulțimea divizorilor numărului 6;
- d) mulțimea multiplilor numărului 25, care sunt mai mici decât 100;
- e) mulțimea soluțiilor, numere naturale, ale ecuației $4x + 3 = 5$.

Soluție: a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; b) $B = \{0, 2, 3\}$; c) $C = \{1, 2, 3, 6\}$; d) $D = \{0, 25, 50, 75\}$; e) $E = \emptyset$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor pentru fiecare dintre următoarele cuvinte:

- a) aritmetica; b) algebra; c) geometria.

2. Patru elevi, Ana, Barbu, Corina și Dan, au scris mulțimea cifrelor din care este format numărul 50053. Răspunsurile lor se pot vedea în tabelul următor.

Ana	Barbu	Corina	Dan
$\{3, 0, 5\}$	$\{5, 0, 0, 5, 3\}$	$\{0, 0, 3, 5, 5\}$	$\{5, 3, 0\}$

Care dintre cei patru elevi a răspuns corect?

3. În figura 1 sunt reprezentate mulțimile A și B . Scrieți cele două mulțimi, enumerându-le elementele.

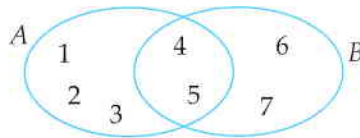


Fig. 1

4. Folosiți simbolurile „ $\in$ ” sau „ $\notin$ ” pentru a descrie relația în care se află fiecare număr din figura 2 față de mulțimile A și B .

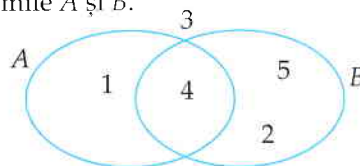
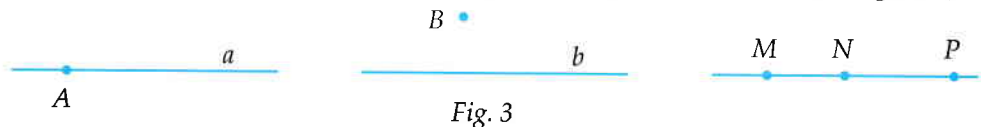


Fig. 2

5. Fie mulțimea $M = \{5, 2, 3, 0, 7\}$. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre propozițiile:

$P_1: 3 \in M; P_2: 6 \in M; P_3: 1 \notin M; P_4: 5 \notin M; P_5: 7 \in M; P_6: 8 \notin M.$

6. Scrieți, folosind unul dintre simbolurile „ $\in$ ” sau „ $\notin$ ”, următoarele relații (figura 3).



- Punctul A este situat pe dreapta a .
 - Punctul B nu se află pe dreapta b .
 - Punctul N aparține dreptei MP , fiind situat între punctele M și N .
 - Punctele (diferite) M, N, P sunt coliniare.
7. Determinați elementele fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

$A = \{x \mid x \text{ este număr natural mai mic decât } 4\};$

$B = \{y \mid y = 3n - 4, n = 2, 3, 4\};$

$C = \{z \mid z = 2^n - 1, \text{ unde } n \in \{0, 1, 2, 3\}\};$

$D = \{t \mid t \text{ este număr natural și } 5t + 1 \leq 16\}.$

8. Scrieți, cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor, mulțimile:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\};$

$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\};$

$C = \{8, 16, 32, 64\};$

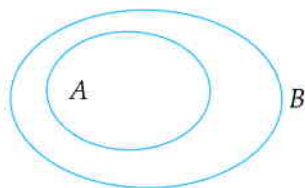
$D = \{10, 20, 30, \dots, 90, 100\}.$

1.2. RELAȚII ÎNTRE MULȚIMI



Două mulțimi care au aceleași elemente se numesc **egale**. Dacă două mulțimi, A și B , sunt egale, scriem $A = B$, iar dacă nu sunt egale, scriem $A \neq B$.

Dacă toate elementele unei mulțimi A sunt și elemente ale unei mulțimi B , spunem că mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B și notăm $A \subset B$. În acest caz, mulțimea A se numește **submulțime** (sau parte) a mulțimii B .



$$(\text{oricare ar fi } x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (A \subset B)$$

Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime: $\emptyset \subset A$, oricare ar fi mulțimea A .

Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A .

Două mulțimi, A și B , sunt egale, dacă și numai dacă fiecare dintre ele este submulțime a celeilalte mulțimi: $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ și } B \subset A)$.

1. Stabiliți care dintre următoarele mulțimi sunt mulțimi egale:

a) $A = \{3, 2, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 7, 5\}$;

b) A este mulțimea cifrelor pare, iar B este mulțimea cifrelor numărului 886000246;

c) $A = \{n \mid n \text{ este număr natural și } 4n + 3 < 10\}$, $B = \{1, 2\}$;

d) A este mulțimea literelor din care este format cuvântul „rezolvare”, iar $B = \{a, e, o, l, r, z\}$.

Soluție: a) Deoarece mulțimile A și B au aceleași elemente, deși scrise în altă ordine, rezultă că $A = B$.

b) Cum $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, avem $A \neq B$.

c) Întrucât $0 \in A$, dar $0 \notin B$, înseamnă că $A \neq B$.

d) Observăm din $v \in A$ și $v \notin B$, deci $A \neq B$.

2. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Scrieți toate submulțimile mulțimii M care au un singur element.

b) Scrieți toate submulțimile mulțimii M care au trei elemente.

c) Câte submulțimi are, în total, mulțimea M ?

Soluție: a) Submulțimile mulțimii M care au un singur element sunt: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ și $\{4\}$.

b) Submulțimile mulțimii M care au trei elemente le obținem eliminând, pe rând, câte un element din M . Astfel, obținem: $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$ și $\{1, 2, 3\}$.

c) În afară de submulțimile pe care le-am scris la punctele a) și b), mulțimea M mai are submulțimi: cu zero elemente ($\emptyset$), cu două elemente ($\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$) și cu patru elemente ($M = \{1, 2, 3, 4\}$). În total, mulțimea M are 16 submulțimi.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie mulțimile $A = \{x \mid x \text{ este număr natural și } x \geq 4\}$, $B = \{y \mid y \text{ este număr natural și } 2^y \geq 10\}$ și $C = \{z \mid z \text{ este număr natural și } z + 3 > 6\}$. Arătați că mulțimile A , B , C sunt egale.

2. Scrieți submulțimile mulțimilor:

a) $A = \{0\}$;

b) $B = \{1, 2\}$;

c) $C = \{a, b, c\}$.

3. Fie mulțimea $M = \{0, 1, 4\}$. Stabiliți care dintre următoarele propoziții este scrisă corect. Pentru propozițiile scrise corect, aflați și valoarea de adevăr:

$P_1: \{0, 1\} \subset M$; $P_2: 1 \subset M$; $P_3: \{1\} \in M$; $P_4: \{1\} \subset M$; $P_5: \{1, 2\} \subset M$; $P_6: M \subset \{0, 1\}$;

$P_7: M \in \{0, 1, 4, 5\}$; $P_8: M \subset \{0, 1, 4, 5, 6\}$.

4. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{3, 4, 5\}$. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții:

$P_1: 2 \in A$; $P_2: 2 \in B$; $P_3: A = B$; $P_4: \{4, 5\} \subset A$; $P_5: \{4, 5\} \subset B$; $P_6: A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$P_7: \{2, 5\} \not\subset B$; $P_8: B \not\subset A$.

5. Fie mulțimile $A = \{a2b \mid a + b = 6\}$ și $B = \{x2y \mid x \cdot y = 5\}$. Determinați mulțimile A , B și stabiliți relația dintre ele.
6. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 5, 7\}$. Dați câte un exemplu de mulțime B cu proprietatea:
 - a) $A \subset B$; b) $B \subset A$; c) $A \subset B$ și $B \subset A$; d) $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$.
7. Fie M o mulțime cu n elemente. Pentru $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, verificați că M are 2^n submulțimi.
8. Fie mulțimea $A = \{x \mid x \text{ este număr natural și } 2^x > x^2\}$. Arătați că $\{3, 4, 5\} \not\subset A$ și $\{5, 6, 7\} \subset A$.
9. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - a) Determinați submulțimile lui A cu trei elemente, a căror sumă este egală cu 10.
 - b) Determinați submulțimile lui A cu trei elemente, al căror produs este egal cu 30.
10. Determinați toate submulțimile X ale mulțimii $\{2, 3, 5, 7, 9\}$ cu proprietatea: $\{5, 7\} \subset X \subset \{3, 4, 5, 7\}$.
11. a) Determinați numărul natural x pentru care $\{x + 1, 2x\} \subset \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
 b) Determinați numerele naturale a și b pentru care $\{a, b, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
12. Determinați numerele naturale a și b , știind că $\{1, 3\} \subset \{2, 3, a, b\} \subset \{b, b - 1, 1, 2, 5\}$.

1.3. MULȚIMI FINITE, CARDINALUL UNEI MULȚIMI FINITE. MULȚIMI INFINITE, MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE



O mulțime cu un număr finit de elemente se numește **mulțime finită**. Numărul elementelor unei mulțimi finite A se numește **cardinalul mulțimii** și se notează cu $\text{card } A$ sau $|A|$.

Mulțimea divizorilor unui număr natural n , D_n , este o mulțime finită.

O mulțime cu un număr infinit de elemente se numește **mulțime infinită**.

Mulțimea numerelor naturale, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, mulțimea numerelor naturale nenule, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, mulțimea multiplilor unui număr natural n , M_n , sunt mulțimi infinite.

PROBLEME REZOLVATE

1. Stabiliți care dintre următoarele mulțimi este infinită:
 - a) mulțimea cifrelor pare;
 - b) mulțimea numerelor naturale pare;
 - c) mulțimea locuitorilor României (în 2022);
 - d) mulțimea numerelor naturale mai mici decât 2^{64} .

Soluție: a) Mulțimea cifrelor pare, $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, are 5 elemente, deci este finită.

b) Mulțimea numerelor naturale pare este $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ este infinită, deoarece mulțimea $\mathbb{N}$ este infinită.

c) Conform datelor oficiale, populația României (în 2022) este sub 20 de milioane de locuitori, așadar mulțimea cerută este finită.

d) Mulțimea considerată are cardinalul egal cu $2^{64} + 1$, deci este finită (deși are un număr foarte mare de elemente).

2. Fie A și B două mulțimi finite. Arătați că, dacă $A \subset B$ și $\text{card } A = \text{card } B$, atunci $A = B$.

Soluție: Din relația $A \subset B$, rezultă că toate elementele mulțimii A sunt și elemente ale mulțimii B . Dacă ar exista un element în B care nu aparține și mulțimii A , atunci $\text{card } A < \text{card } B$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci, $A = B$.

PROBLEME PROPUSE

1. Stabiliți care dintre următoarele mulțimi este infinită:

- a) mulțimea cifrelor impare; b) mulțimea planetelor din Sistemul solar;
c) mulțimea numerelor prime; d) mulțimea numerelor naturale mai mici decât 10^{100} .

2. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 6\}$, $B = \{y \mid y = 2x, x \in A\}$ și $C = \{z \mid z = 2^x, x \in A\}$. Arătați că mulțimile B și C au același cardinal, dar $B \neq C$.

3. a) Determinați mulțimile finite D_6 , D_7 , D_8 , D_{12} și D_{36} .

b) Scrieți cele mai mici trei elemente ale fiecăreia dintre mulțimile infinite M_7 , M_{12} și M_{30} .

4. Determinați numărul elementelor pentru fiecare dintre următoarele mulțimi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \text{ și } 16 \leq x^2 < 81\}, B = \{y \mid y = 6n + 2, n \in \mathbb{N} \text{ și } 12 \leq y < 50\},$$

$$C = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N} \text{ și } x \text{ are trei cifre}\}, D = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ este divizibil cu } 5\}.$$

5. Determinați numărul de elemente ale fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

- a) $\{1, 3, 2, 5, 0\}$;
b) mulțimea cifrelor pare ale numărului 561122272;
c) mulțimea numerelor naturale n care verifică inegalitatea $5n + 4 < 4$;
d) mulțimea numerelor naturale x cu proprietatea $2^x < 2000$.

6. Fie mulțimea $A = \{x \mid x = 3n - 1, n \in \mathbb{N}, 10 \leq n < 20\}$.

- a) Determinați $\text{card } A$.
b) Calculați suma elementelor mulțimii A .

7. Determinați numărul natural $n \geq 2$, știind că $n + 1$, $2n - 3$ și $n + 2$ aparțin unei mulțimi A cu $\text{card } A = 2$.

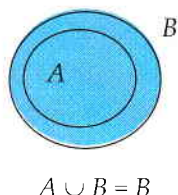
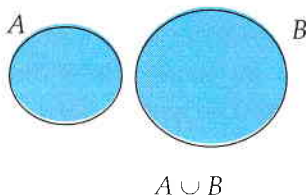
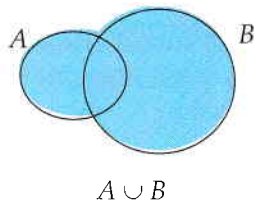
8. Considerăm mulțimea $A = \{x \mid x = 5n + 2, n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Scrieți cele mai mici cinci elemente ale mulțimii A .
b) Arătați că mulțimea A conține o infinitate de numere pare și o infinitate de numere impare.
c) Este 2021 element al mulțimii A ? Dar 2022?



Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A și B :

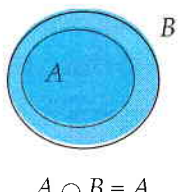
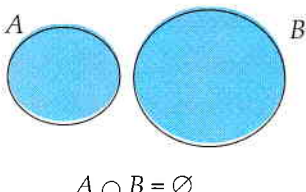
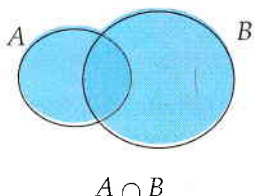
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$



Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele celor două mulțimi:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

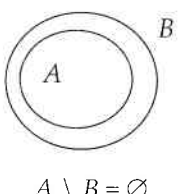
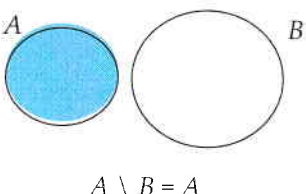
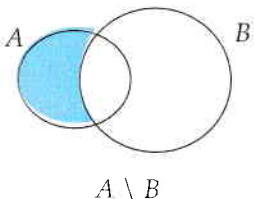
Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci spunem că A și B sunt **mulțimi disjuncte**.



(A, B sunt mulțimi disjuncte)

Diferența mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin lui A și nu aparțin lui B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$



Dacă A și B sunt două mulțimi finite, atunci

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B).$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$ și $B = \{y \mid y = x^2, n \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$. Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Soluție: Deoarece $A = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\} = \{1, 2, 4, 8\}$ și $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$, rezultă că $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 8, 9, 16, 25\}$, $A \cap B = \{1, 4\}$, $A \setminus B = \{2, 8\}$ și $B \setminus A = \{0, 9, 16, 25\}$.

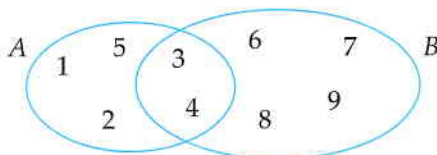
2. Determinați mulțimile A și B care verifică simultan următoarele condiții:

- i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$; ii) $A \cap B = \{3\}$; iii) $A \setminus B = \{1, 2\}$.

Soluție: Din relația ii) deducem că $3 \in A$ și $3 \in B$, iar din condiția iii) rezultă că numerele 1 și 2 aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B . Având în vedere ipoteza i), deducem că cele două mulțimi mai pot conține doar elementul 4. Acesta nu poate fi element comun (conform ii)) și nici nu poate fi în A fără să fie și în B (conform condiției iii)). Prin urmare, avem $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{3, 4\}$.

PROBLEME PROPUSE

1. În figura de mai jos sunt reprezentate mulțimile A și B . Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.



2. a) Dacă $A = \{1, 3, 7, 8\}$ și $B = \{3, 5, 6, 7\}$, calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
b) Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{4, 5\}$, determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
3. a) Fie mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{a, e, f\}$. Calculați $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ și $A \cup B$.
b) Fie mulțimile $X = \{a, b, c\}$ și $Y = \{a, b\}$. Determinați $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \setminus Y$ și $Y \setminus X$.
4. a) Dacă $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$, calculați $A \cup B$ și $A \cap B$.
b) Dacă $C = \{3, a, 2\}$ și $D = \{a, b, 3, 9, 2\}$, calculați $C \cap D$, $C \cup D$, $C \setminus D$ și $D \setminus C$.
5. Considerăm mulțimile $A = \{2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții:
 $P_1: 4 \in A \cap B$; $P_2: 6 \in A \cup B$; $P_3: 7 \notin A \cup B$; $P_4: 2 \in A \cap B$;
 $P_5: 2 \in A \setminus B$; $P_6: 2 \notin B \setminus A$; $P_7: 4 \in A \setminus B$.
6. Fie mulțimile $A = \{1, 3, 4, 5\}$ și $B = \{0, 2, 4, 6\}$. Determinați mulțimile $R = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$, $I = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$, $D_1 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ și $D_2 = \{x \mid x \notin A \text{ și } x \in B\}$.
7. Considerăm mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^+ \text{ și } x \leq 3\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x < 5\}$. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
8. Fie mulțimile $A = \{x \mid x = \overline{1ab} \text{ și } x \text{ se divide cu } 45\}$ și $B = \{x \mid x = \overline{13c} \text{ și } x \text{ este multiplu al lui } 15\}$. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$ și $B \setminus A$.
9. Considerăm mulțimile:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 70 \text{ și } x \text{ împărțit la } 8 \text{ dă restul } 3\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 50 \text{ și } x \text{ împărțit la } 6 \text{ dă restul } 1\}$.
a) Determinați $A \cap B$.
b) Câte elemente are mulțimea $A \cup B$?

10. Fie $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 6\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2^x > 8\}$. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
11. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 0, 3\}$, $B = \{3, 2, 5, 4\}$, $C = \{7, 0, 3, 2\}$. Determinați:
 a) $A \cup (B \cup C)$; b) $A \cup (B \cap C)$; c) $A \cap (B \cup C)$; d) $(A \cap B) \cap C$;
 e) $(A \setminus B) \cup C$; f) $A \setminus (B \cup C)$; g) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
12. Pentru două mulțimi A și B definim $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Calculați $A \Delta B$ dacă:
 a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$; b) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$;
 c) $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3\}$; d) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$.
13. Patru elevi, Ana, Bogdan, Costel și Dana, au avut de ales două mulțimi disjuncte dintre mulțimile: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 4, 5\}$, $C = \{2, 3, 6, 7\}$ și $D = \{5, 6, 7, 8\}$. Răspunsurile lor sunt prezentate în tabelul următor.
- | Ana | Bogdan | Costel | Dana |
|------------|------------|------------|------------|
| A și B | B și C | C și D | D și A |
- Cine a răspuns corect?
14. Demonstrați că $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ împărțit la } 6 \text{ dă restul } 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ împărțit la } 9 \text{ dă restul } 2\}$ sunt mulțimile disjuncte.
15. Determinați $A \cap B$, știind că $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
16. Determinați mulțimile A și B , știind că:
 a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$ și $A \setminus B = \{3\}$;
 b) $A \cap B = \{a, b\}$, $A \setminus B = \{c\}$, $B \setminus A = \{d, e\}$.
17. Determinați mulțimile X și Y , știind că:
 a) $X \cup Y = \{2, 3, 4, 5\}$, $X \setminus Y = \{2, 3, 4\}$, $\text{card } X = 4$;
 b) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X \cap Y = \{1, 2\}$, $5 \in X \setminus Y$ și $\text{card } X < \text{card } Y$.
18. Dintre cei 24 de elevi ai unei clase, 16 au participat la un concurs de matematică, 13 au participat la un concurs de fizică, iar 4 nu au participat la niciunul dintre aceste două concursuri. Aflați câți elevi au participat numai la concursul de matematică și câți elevi au participat numai la concursul de fizică.
19. Într-o clasă sunt 26 de elevi și fiecare dintre ei joacă fotbal sau volei. Dacă 14 elevi joacă fotbal, iar 17 elevi joacă volei, aflați câți elevi din clasă joacă și fotbal și volei.
20. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$.
 a) Câte submulțimi ale mulțimii M au suma elementelor cel puțin 54?
 b) Câte submulțimi cu două elemente ale mulțimii M au produsul elementelor cel mult 8?